

УДК 519.622

doi:10.21685/2072-3040-2021-1-8

## Численный метод решения задачи о распространении ТЕ-поляризованных волн в многослойном неоднородном волноводе кругового сечения, заполненном метаматериалом

Е. Д. Деревянчук<sup>1</sup>, А. О. Лапич<sup>2</sup>, М. О. Снегур<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

<sup>1,2</sup>mmm@pnzgu.ru, <sup>3</sup>snegur.max15@gmail.com

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Целью работы является численное исследование задачи о распространении ТЕ-поляризованных электромагнитных волн многослойной регулярной неоднородной волноведущей структуры со слоями из метаматериала. *Материалы и методы.* Проблема сводится к решению задачи на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для получения численного решения задачи используется метод пристрелки по параметру. *Результаты.* Осуществлена реализация численного метода для решения задачи распространения электромагнитной волны в волноводе многослойного типа. Были получены численные результаты вычислений. *Выводы.* Примененный метод отлично подходит для нахождения приближенного решения задачи распространения электромагнитных волн в структуре волновода.

**Ключевые слова:** задача распространения электромагнитных волн, ТЕ-волны, уравнение Максвелла, дифференциальные уравнения, многослойный волновод, метаматериал, метод пристрелки

**Финансирование:** исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-11-20087.

**Для цитирования:** Деревянчук Е. Д., Лапич А. О., Снегур М. О. Численный метод решения задачи о распространении ТЕ-поляризованных волн в многослойном неоднородном волноводе кругового сечения, заполненном метаматериалом // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 102–111. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-8

## A numerical method for solving the problem of TE-polarized waves' propagation in a multilayer inhomogeneous circular waveguide filled with a metamaterial

E.D. Derevyanchyk<sup>1</sup>, A.O. Lapich<sup>2</sup>, M.O. Snegur<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Penza State University, Penza, Russia

<sup>1,2</sup>mmm@pnzgu.ru, <sup>3</sup>snegur.max15@gmail.com

**Abstract.** *Background.* The purpose of this work is to numerical study the problem of TE-electromagnetic waves' propagation in a multilayer regular waveguide structure with metamaterial layers. *Material and methods.* The problem boils down to solving the eigenvalue problem for a system of ordinary differential equations. To achieve a numerical solution, the parameter shooting method is used. *Results.* A numerical method is implemented to solve the problem of an electromagnetic wave's propagation in a multilayer waveguide.

Numerical results were obtained. *Conclusions.* The applied method is excellent for finding an approximate solution to the problem of propagation of electromagnetic waves in the structure of a waveguide.

**Keywords:** propagation problem of electromagnetic waves, Maxwell's equations, TE-waves, differential equations, multilayer waveguide, metamaterial, shooting method

**Acknowledgments:** the research was financed by the RSF within the research project 20-11-20087.

**For citation:** Derevyanchuk E.D., Lapich A.O., Snegur M.O. A numerical method for solving the problem of TE-polarized waves' propagation in a multilayer inhomogeneous circular waveguide filled with a metamaterial. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2021;1:102–111. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-8

## Введение

Применение новых композитных материалов и новых технологий в проектировании оптоэлектронных устройств привело к необходимости исследования новых классов задач электродинамики, в частности, многослойных волноведущих структур со вставками из метаматериала. Внедрение композитных материалов позволяет получить полезные качества для передачи. При этом основной задачей является изучение режимов распространения электромагнитных волн в таких изделиях [1–5].

В представленной работе рассматривается задача о распространении волн Н типа (ТЕ-волн), которые распространяются в многослойном открытом круглом волноводе со слоями из метаматериала. Физическая задача сводится к решению задачи на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Проверка метода и получение численных результатов основана на испытании серии неоднородных волноводов с различным заполнением слоев.

## 1. Постановка задачи

В качестве геометрической модели возьмем векторное пространство  $\mathbb{R}^3$ . В данном случае систему координат будем предполагать цилиндрической  $(\rho, \varphi, z)$ . Весь объем пространства заполнен изотропной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_c \varepsilon_0 = \text{const}$ , где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Многослойный волновод цилиндрической формы

$$W := \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq \rho < r_1, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \cup$$

$$\cup \{(\rho, \varphi, z) : r_1 \leq \rho \leq r_2, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \cup \dots \cup \{(\rho, \varphi, z) : r_{n-1} \leq \rho \leq r_n, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

с образующей линией, параллельной оси  $Oz$ , помещается в  $\mathbb{R}^3$ . Продолжение волновода по оси  $z$  – не ограничено. Его сечение, полученное в результате «разреза» волновода перпендикулярно данной оси, представляет собой окружности концентрической формы с радиусами  $r_1, r_2, \dots, r_n$  (рис. 1). Заметим, что волновод является  $n$ -слойным.

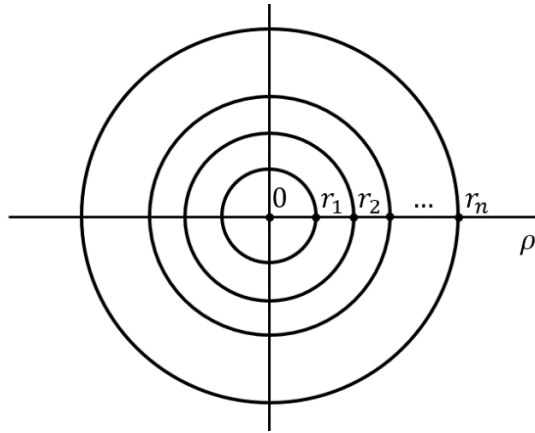


Рис. 1. Поперечное сечение волновода  $W$

Магнитная проницаемость также постоянна и равна  $\mu = \mu_0$ , где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума.

Комплексные амплитуды  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  монохроматического электромагнитного поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}; \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = (E_\rho, E_\varphi, E_z)^T, \mathbf{H} = (H_\rho, H_\varphi, H_z)^T. \quad (2)$$

Обозначение  $(\cdot)^T$  всюду предполагает операцию транспонирования.

Так как рассматриваются вытекающие волны, следует учитывать условие на бесконечности, которое сформулировано следующим образом: электромагнитное поле растёт при  $\rho \rightarrow \infty$ ;  $\omega$  – круговая частота. Также необходимо выполнение условий непрерывности касательных компонент поля на границах контакта сред  $\rho = r_1 \dots r_n$ . Обозначение  $(\cdot)^T$  всюду предполагает операцию транспонирования. Решения уравнений Максвелла ищутся во всем пространстве.

Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид  $\epsilon = \tilde{\epsilon}\epsilon_0$ , где

$$\tilde{\epsilon} = \begin{cases} \epsilon_c, & 0 \leq \rho \leq r_1, \\ -\epsilon_1^2(\rho), & r_1 \leq \rho \leq r_2, \\ \epsilon_2^2(\rho), & r_2 \leq \rho \leq r_3, \\ \dots \\ -\epsilon_{n-1}^2(\rho), & r_{n-1} \leq \rho \leq r_n, \\ \epsilon_c, & \rho \geq r_n. \end{cases} \quad (3)$$

Следовательно, рассматривается многослойный круглый открытый неоднородный волновод со слоями из метаматериала.

Рассмотрим ТЕ-волны в гармоническом режиме:

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (0, E_\varphi, 0)^T, \quad \mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (H_\rho, 0, H_z)^T,$$

$$E_\varphi = E_\varphi(\rho, \varphi, z), \quad H_\rho = H_\rho(\rho, \varphi, z), \quad H_z = H_z(\rho, \varphi, z).$$

В уравнения (1) впишем поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , тем самым получим следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega \varepsilon E_\varphi, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -i\omega \mu H_\rho, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_\varphi)}{\partial \rho} = i\omega \mu H_z. \end{array} \right.$$

Анализируя предыдущую систему, видим, что компоненты  $H_z$  и  $H_\rho$  не зависят от  $\varphi$ .  $E_\varphi$  выражается через  $H_z$  и  $H_\rho$ . Можно сделать вывод о том, что  $E_\varphi$  также не зависит от  $\varphi$ .

Необходимые для решения задачи волны должны распространяться вдоль оси  $Oz$  волновода  $W$  с гармонической зависимостью от  $z$ . Отсюда можно записать компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  как

$$E_\varphi = E_\varphi(\rho) e^{i\gamma z}, \quad H_\rho = H_\rho(\rho) e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(\rho) e^{i\gamma z},$$

где  $\gamma$  обозначает вещественный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны), который нужно отыскать.

При этих условиях система представляется в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} i\gamma H_\rho(\rho) - (H_z(\rho))' = -i\omega \varepsilon E_\varphi(\rho), \\ i\gamma E_\varphi(\rho) = -i\omega \mu H_\rho(\rho), \\ \frac{1}{\rho} (\rho E_\varphi(\rho))' = i\omega \mu H_z(\rho), \end{array} \right. \quad (4)$$

где  $(\cdot)' \equiv \frac{d}{d\rho}$ .

Выразим компоненты  $H_z$  и  $H_\rho$  через  $E_\varphi$  из системы (4):

$$H_z(\rho) = \frac{1}{i\omega \mu \rho} (\rho E_\varphi(\rho))', \quad H_\rho(\rho) = -\frac{\gamma}{\omega \mu} E_\varphi(\rho),$$

подставим найденные выражения в первое уравнение

$$\left( \frac{1}{\rho} (\rho E_{\varphi}(\rho))' \right)' + (\omega^2 \mu \varepsilon - \gamma^2) E_{\varphi}(\rho) = 0.$$

Заменяя  $u(\rho) := E_{\varphi}(\rho)$  и  $k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$ , получим

$$\left( \rho^{-1} (\rho u)' \right)' + (k_0^2 \tilde{\varepsilon} - \gamma^2) u = 0. \quad (5)$$

В цилиндре  $0 < \rho < r_1$  диэлектрическая проницаемость представлена в виде  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_c$ . Получим уравнение Бесселя из формулы (5):

$$u'' + \rho^{-1} u' - \rho^{-2} u - k_c^2 u = 0, \quad k_c^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_c. \quad (6)$$

Решив уравнение (6), мы получим

$$u = C_1 I_1(k_c \rho) + \tilde{C}_1 K_1(k_c \rho), \quad \rho < r_1.$$

Важным требованием является учет условия ограниченности поля во всякой конечной области. Из чего следует, что  $\tilde{C}_1 = 0$  и решение примет вид

$$u = C_1 I_1(k_c \rho). \quad (7)$$

В оболочке волновода ( $r_1 < \rho < r_n$ ) получим следующее уравнение:

$$u'' + \rho^{-1} u' - \rho^{-2} u - k_i^2 u = 0, \quad k_i^2 = k_0^2 \varepsilon_i(\rho) - \gamma^2. \quad (8)$$

При  $\rho > r_n$  получим

$$u'' + \rho^{-1} u' - \rho^{-2} u - k_c^2 u = 0, \quad k_c^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_c. \quad (9)$$

Так как рассматриваются вытекающие волны, для которых амплитуда поля возрастает при удалении от волновода в поперечном направлении, то решение (9) будет иметь вид

$$u = C_2 I_1(k_c \rho), \quad \rho > r_n. \quad (10)$$

Условия сопряжения для функций  $u(\rho)$  и  $u'(\rho)$  выглядят следующим образом:

$$[u]_{\rho=r_i} = 0, \quad [u']_{\rho=r_i} = 0. \quad (11)$$

Сформулируем задачу. Необходимо отыскать такие вещественные значения параметра  $\gamma$ , для которого будет существовать отличная от нуля функция  $u$  (зависящая от  $\rho$ ), в свою очередь определяемая формулами (7) и (10); в оболочке волновода она будет удовлетворять уравнениям (8), а также принимать условия сопряжения на границах (11) и выполнять условия на бесконечности.

## 2. Численный метод вычисления собственных значений

Для исследования возьмем задачу Коши на сегменте  $[r_1, r_2]$  для уравнения

$$u'' = -\rho^{-1}u' + \rho^{-2}u - k_1^2(\rho)u, \quad (12)$$

для которой будут использованы условия

$$u(r_1) = C_1 I_1(k_c r_1), \quad u'(r_1) = C_1 k_c \left( I_0(k_c r_1) - \frac{I_1(k_c r_1)}{k_c r_1} \right). \quad (13)$$

После чего возьмем новую («следующую») задачу Коши на отрезке  $[r_2, r_3]$ :

$$u'' = -\rho^{-1}u' + \rho^{-2}u - k_2^2(\rho)u. \quad (14)$$

Начальные условия будут иметь вид

$$u(r_2 + 0) = u(r_2 - 0), \quad u'(r_2 + 0) = u'(r_2 - 0), \quad (15)$$

$u(r_2 - 0)$  и  $u'(r_2 - 0)$  здесь определяются из условий сопряжения на границе  $\rho = r_2$ , как решения предыдущей задачи Коши в точке  $\rho = r_2$ .

Решая вспомогательные задачи Коши на оставшихся отрезках  $([r_3, r_4], \dots, [r_{n-1}, r_n])$ , получаем значения  $u(r_n - 0)$  и  $u'(r_n - 0)$  на границе волновода.

Постоянную  $C_2$  примем за единицу и, воспользовавшись условиями сопряжения на границе  $r_n$  (11), получим дисперсионное уравнение

$$\Delta(\gamma) \equiv u'(r_n) I_1(k_c r_n) - k_c u(r_n) \left( I_0(k_c r_n) - \frac{I_1(k_c r_n)}{k_c r_n} \right). \quad (16)$$

Необходимо рассмотреть функцию

$$F(\gamma) := u(r_n - 0; \gamma) - u(r_n + 0; \gamma).$$

Так как нам известны решения (10) и соответствующие условия сопряжения на  $r_n$  (11), то очевидно, что  $F(r_n; \gamma) \equiv \Delta(\gamma)$ .

Значения функции  $F(\gamma)$  можно выразить только через значения решения задачи Коши (видно из формулы (16)). Пусть  $\gamma = \tilde{\gamma}$  таково, что  $F(\gamma) = 0$ . Из этого следует вывод, что число  $\tilde{\gamma}$  можно считать решением задачи, т.е. постоянной распространения.

**Утверждение.** Если существует отрезок  $[\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \in [\underline{\gamma}^*, \bar{\gamma}^*]$ , для которого  $F(\underline{\gamma})F(\bar{\gamma}) < 0$ , то постоянная распространения (одно собственное значение)  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$  задачи будет существовать (хотя бы одно собственное значение).

При использовании рассматриваемого метода можно изобразить графики, которые показывают зависимость распространения  $\gamma$  от частоты  $f$ . Данная частота связана с циклической частотой  $\omega$  при помощи равенства

$f = 2\pi\omega$ . Кривые  $\gamma = \gamma(f)$  такого типа также называют дисперсионными кривыми.

Возьмем  $0 < f_* < f^* < \infty$ . Также предположим, что  $k_0^2 \sqrt{\epsilon_c} < \gamma_* < \gamma^* < \infty$  – некоторые числа. Полагаем  $f \in [f_*, f^*]$ ,  $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$ .

Необходимо разбить отрезки  $[f_*, f^*]$  и  $[\gamma_*, \gamma^*]$  на  $n$  и  $m$  частей соответственно. Тогда имеем  $\{f_i, \gamma_i\}$ ,  $i = 0 \dots n$ ,  $j = 0 \dots m$ ; к тому же  $f_0 = f_*$ ,  $f_n = f^*$ ,  $\gamma_0 = \gamma_*$ ,  $\gamma_m = \gamma^*$ . Следующим шагом будет построение  $F(f_i; \gamma_j)$ :

$$F(f_i, \gamma_j) := u_{ij}(r_n - 0) - u_{ij}(r_n + 0).$$

Пусть для  $f_i$  будут существовать некоторые  $\gamma_j$  и  $\gamma_{j+1}$ , на основе которых

$$F(f_i; \gamma_j)F(f_i; \gamma_{j+1}) < 0.$$

Выходит, что имеется собственное значение  $\tilde{\gamma}_j \in (\gamma_j, \gamma_{j+1}) < 0$ , которое будет собственным значением для задачи о распространении волн в волнодушной структуре. Такому значению отвечает толщина слоя  $f_i$ . Чтобы отыскать значение  $\tilde{\gamma}_j$ , можно воспользоваться широко известным методом дихотомии. Он полезен тем, что благодаря нему можно добиться высокой точности вычисления.

Создадим метод нахождения приближенного значения постоянной распространения, положив за основу метод половинного деления (МПД).

Следует задать погрешность  $\delta > 0$ . Используем отрезок  $[\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1]$ , удовлетворяющий неравенству

$$F(f_i, \underline{\gamma}_1)F(f_i, \bar{\gamma}_1) < 0.$$

Собственные значения  $\tilde{\gamma}$  (искомое) и  $\tilde{\gamma}_1$  (приближенное) должны принадлежать диапазону  $(\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1)$ .

Необходимо найти центральную точку отрезка  $\gamma_1$  (т.е. его середину):

$$\gamma_1 = (\underline{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_1) / 2.$$

Вычислим функцию  $F(f_i; \gamma_1)$  и проверим такие условия:

- Число  $\gamma_1$  – искомое приближенное собственное значение, когда  $|F(f_i; \gamma_1)|$  меньше и не равняется указанной погрешности.
- Собственное значение  $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}_1, \gamma_1)$ , если  $F(f_i; \underline{\gamma}_1)F(f_i; \gamma_1)$  будет меньше нуля. Считая  $\underline{\gamma}_n := \underline{\gamma}_1$  и  $\bar{\gamma}_n := \gamma_1$  получим, что  $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$ .
- Собственное значение  $\tilde{\gamma} \in (\gamma_1, \bar{\gamma}_1)$ , если  $F(f_i; \gamma_1)F(f_i; \bar{\gamma}_1)$  будет меньше нуля.

Положив  $\underline{\gamma}_n := \underline{\gamma}_1$  и  $\bar{\gamma}_n := \bar{\gamma}_1$ , получим, что  $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$ .

Шаг за шагом используем МПД. Дойдя до  $n$  шага, мы обнаружим, что искомое приближенное значение  $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$ . После этого станет понятно, что  $|\bar{\gamma}_n - \gamma_n| = 2^{-n} |\bar{\gamma}_1 - \gamma_1|$ .

Выберем число  $n$  такое, что неравенство  $2^{-n} |\bar{\gamma}_1 - \gamma_1| < \delta$  будет выполняться. Тогда в качестве приближенного значения  $\tilde{\gamma}_n$  постоянной распространения  $\tilde{\gamma}$  можно принять, к примеру, центральную точку отрезка  $[\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1]$ , т.е.  $\tilde{\gamma}_n = (\bar{\gamma}_n + \underline{\gamma}_n) / 2$ .

### 3. Численные результаты

Для получения численных результатов был использован метод, предложенный в предыдущем разделе.

Построены графики дисперсионных кривых. На их основе изучена зависимость спектрального параметра  $\gamma$  от циклической частоты  $\omega$ .

На рис. 2 визуализированы графики дисперсионных кривых 4-слойного волновода, состоящего из однородных слоев. Слои с метаматериалом чередуются с заполненными диэлектриком слоями.

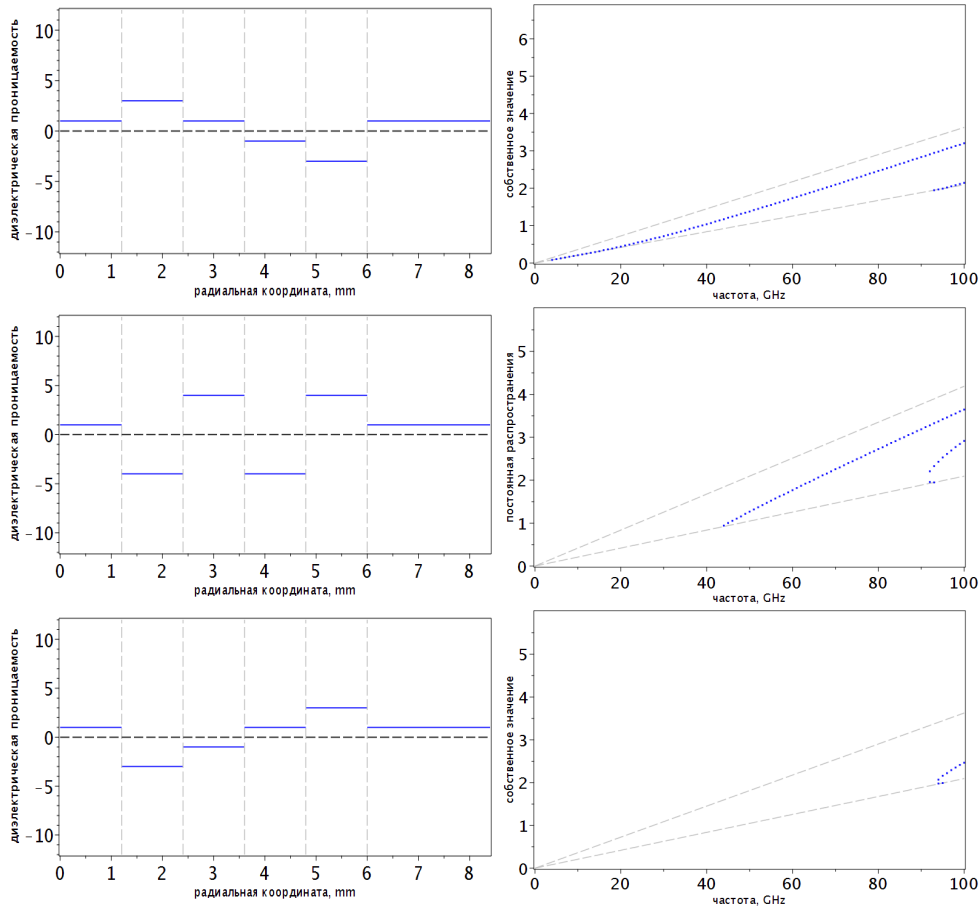


Рис. 2. Дисперсионные кривые и профили диэлектрической проницаемости



### Заключение

Проведено численное исследование спектра задачи о ТЕ-поляризованных электромагнитных волнах многослойного волновода. Использование предложенного варианта метода может быть оправдано, когда проводится анализ однородных волноводов с  $n$ -слоями, а явное дисперсионное уравнение имеет очень сложную форму.

Для неоднородного волновода явное дисперсионное уравнение недоступно, и численное исследование спектра собственных значений может быть выполнено только численным методом, например, предложенным в этой работе. Проведенные эксперименты подтвердили правильность реализации данного метода, его сходимости и эффективность.

### Список литературы

1. Solyman L. & Shamonina E. *Waves in Metamaterials*. Oxford : Oxford University Press, 2009.
2. Veselago V. G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$  // *Sov. Phys. Usp.* 1967. Vol. 10 (4). P. 509–514.
3. Smolkin E., Shestopalov Y., Snegur M. Surface Waves in a Nonlinear Metamaterial Rod // *Radio Science*. 2020. Vol. 55.
4. Smolkin E., Smirnov Y., Snegur M. Leaky waves in a nonlinear metamaterial rod // *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2020. Vol 34. P. 1680–1690.
5. Snegur M., Smolkin E. Diffraction of TE Polarised Electromagnetic Waves by a Nonlinear Metamaterial Waveguide // 2020 33rd General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science, URSI GASS 2020, 2020.

### References

1. Solyman L. & Shamonina E. *Waves in Metamaterials*. Oxford: Oxford University Press, 2009.
2. Veselago V.G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . *Sov. Phys. Usp.* 1967;10(4):509–514.
3. Smolkin E., Shestopalov Y., Snegur M. Surface Waves in a Nonlinear Metamaterial Rod. *Radio Science*. 2020;55.
4. Smolkin E., Smirnov Y., Snegur M. Leaky waves in a nonlinear metamaterial rod. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2020;34:1680–1690.
5. Snegur M., Smolkin E. Diffraction of TE Polarised Electromagnetic Waves by a Nonlinear Metamaterial Waveguide. 2020 33rd General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science, URSI GASS 2020, 2020.

### Информация об авторах / Information about the authors

**Екатерина Дмитриевна Деревянчук**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

**Ekaterina D. Derevyanchuk**  
Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor  
of the sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

**Андрей Олегович Лапич**  
магистрант, Пензенский  
государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

**Andrey O. Lapich**  
Master's degree student, Penza State  
University (40 Krasnaya street,  
Penza, Russia)

**Максим Олегович Снегур**  
аспирант, Пензенский государственный  
университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: snegur.max15@gmail.com

**Maksim O. Snegur**  
Postgraduate student, Penza State  
University (40 Krasnaya street,  
Penza, Russia)

**Поступила в редакцию / Received 10.12.2020**

**Поступила после рецензирования и доработки / Revised 25.12.2020**

**Принята к публикации / Accepted 18.01.2021**